BOLTZMANN E A PRODUÇÃO DE DIVERSIDADE NUM UNIVERSO*

M. A. F. Gomes
Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco - 50670-901 - Recife - PE

Extensive numerical simulations show that the maximum diversity of sizes, D_{max}, produced by fragmentation dynamics on a system of mass M_0 tends to decay with the space dimension d as $D^2_{max}/M_0 \sim \exp(-md)$, with $m \approx 1$, irrespective the details of the dynamics. The consequences of this behavior for the existence and stability of a diversified universe which is complex and produces structures spanning all possible length scales are discussed and some anologies between diversity of mass and Boltzmann's entropy are indicated.

Keywords: complexity; diversity; entropy; fragmentation.

Vivemos num universo complexo onde a matéria se organiza em muitos tipos de estruturas disconexas ou fragmentos varrendo todas as escalas de tamanho, desde as partículas elementares até as galáxias e aglomerados de galáxias, passando por átomos, moléculas, biopolímeros, homens e estrelas. Complexidade neste trabalho é medida pela diversidade de massa desses fragmentos. O conceito de diversidade será definido matematicamente mais adiante; por ora basta considerar um universo complexo como um sistema que apresenta estruturas disconexas de massas diversas, sem tamanhos característicos.

O assunto aqui gira em torno da pergunta: Em que condições podemos esperar que um universo evolua para um estado de maior ou menor produção de complexidade ou diversidade por unidade de massa ou, alternativamente, Como um universo pode tornar-se complexo? Ludwig Boltzmann (1844-1906) nasceu numa época em que a dificuldade para a ciência era combinar a historicidade do universo com as operações uniformes, contínuas e não-revolucionárias das leis naturais permanentes. Sua interpretação da segunda lei da termodinâmica é um marco no esforço de se entender a evolução e a irreversibilidade de sistemas de muitas partículas rumo ao equilíbrio térmico.

A resposta a indagação levantada no início do parágrafo anterior está ligada a herança de Boltzmann de se usar conceitos probabilísticos na explicação de fenômenos envolvendo um grande número de partículas. Dois aspectos parecem ser necessários para se compreender um universo diversificado. Primeiramente necessitamos de um argumento ou princípio estatístico capaz de mostrar em que condições poderemos gerar e manter uma maior ou menor diversidade de massa, a partir de uma certa quantidade inicial de matéria. Este princípio estatístico é importante, pois o entendimento da evolução detalhada de um universo a partir das várias interações está fora de cogitação, mesmo nesses dias de sonhos com uma "final theory". Assim, é certamente mais fácil explicar a produção de diversidade num universo usando-se o príncipio estatístico, do que tentar derivar a diversidade a partir das equações fundamentais da dinâmica. O segundo aspecto, que não será detalhado aqui, se refere aos pré-requisitos quânticos necessários a uma estabilidade mínima dos fragmentos formados durante a dinâmica. Se o tempo de vida médio dos fragmentos for muito curto, esse universo decairá rapidamente num estado de baixa diversidade de tipo gasoso em que os únicos componentes serão os constituentes fundamentais - as partículas elementares. Se, por outro lado, a estabilidade dos fragmentos for absoluta, o universo permanecerá indefinidamente num desinteressante estado de diversidade baixa com a matéria distribuída em fragmentos de um ou de alguns poucos tamanhos característicos.

O conceito de diversidade tem sido usado em um crescente número de contextos na literatura científica, em conexão com problemas biológicos[1] e evolucionários[2], bem como em relação com auto-organização, sistemas complexos e autômatos-celulares[3], fractais[4] e fenômenos de não-equilíbrio[5]. Recentemente, o conceito de diversidade de tamanhos[5-13] tem sido investigado para vários processos de não-equilíbrio e autômatos celulares em cujas dinâmicas é gerado uma distribuição de n(s,t) fragmentos de tamanho (massa) s no tempo t. Tais estudos[5-13] baseiam-se em simulações numéricas em grandes redes, de simetrias diversas, com dimensões variando entre 1 e 5, e consideram tanto sistemas fractais quanto Euclideanos, cobrindo situações de interesse físico, químico e biológico. A diversidade de tamanhos, $D(t)$, é uma variável particularmente adequada para medir a complexidade de sistemas grandes. A função $D(t)$ fornece o número de tamahos diferentes no tempo t e é definida como

$$D(t) = \sum_s \theta[n(s,t)], \quad (1)$$

onde $\theta(x) = 1$ se $x > 0$ e 0 caso contrário. Uma das mais notáveis conclusões desses estudos sobre a diversidade de tamanhos é a existência de uma lei de escala robusta $D_{max} \sim N^{1/2}_{max}$ entre o máximo da diversidade de tamanho, D_{max}, e o máximo de fragmentos, N_{max}. Complementarmente, podemos escrever $D_{max} \sim M_0^{1/2}$, pois a massa inicial M_0 escala linearmente com N_{max}. De particular interesse para este trabalho é a quantidade máxima de diversidade que pode ser produzida a partir de uma cerca quantidade M_0 de massa. A Fig.1 é um gráfico de D^2_{max}/M_0 em função da dimensão espacial d onde a dinâmica ocorre, para um tipo bem geral de dinâmica de fragmentação de interesse físico e químico recentemente estudada[5,7]. D^2_{max}/M_0 decai exponencialmente com d como $D^2_{max}/M_0 \sim \exp(-md)$, onde m é próximo da unidade. Este resultado parece independer do tipo de dinâmica considerado[13]. Além disso, para d fixo D^2_{max}/M_0 decai muito lentamente com o tamanho L da rede. Os dados da Fig. 1 se referem a simulações em redes quadradas e triangulares com tamanhos variando de L = 4.000 a 60.000 (d = 1); L = 81 a 2187 (d = 2); L = 20 a 100 (d = 3); L = 20 a 35 (d = 4) e L = 13 a 23 (d = 5). Cada ponto nessa figura representa uma média sobre 50 experimentos similares e os dados aí reportados incluem a

* Trabalho financiado em parte pela FINEP e CNPq.

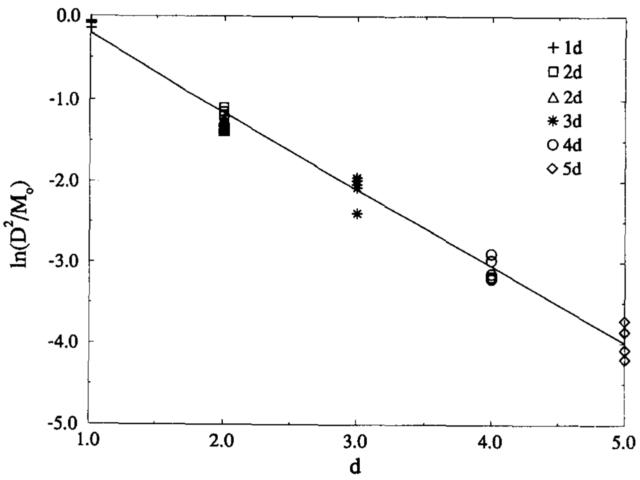

Figura 1. Gráfico da diversidade máxima de fragmentos (D) produzida por unidade de massa (M_0) em função da dimensionalidade do espaço (d), para um tipo de dinâmica de fragmentação de interesse físico recentemente estudada[5,7]. Veja o quarto parágrafo do texto para mais detalhes.

implementação da dinâmica em sistemas Euclideanos e fractais regulares e estatísticos.

Do exposto no parágrafo anterior e de simulações sistemáticas sobre o assunto[13] segue que é mais fácil gerar uma grande diversidade de massa a partir de uma dada massa inicial M_0 em espaços de baixa dimensionalidade. Isso é a essência do princípio estatístico da produção de diversidade mencionando no terceiro parágrafo. Quantitativamente, esse princípio diz apenas que a diversidade máxima produzida por unidade de massa tende a decair exponencialmente com a dimensão, independentemente da dinâmica. Ele parece razoável, apesar de não ser óbvio, pois para gerar muitos fragmentos disconexos a partir de um grande sistama conexo é necessário cortar progressivamente as ligações ou conexões que mantém a matéria concentrada nesse grande fragmento. Essas operações são mais facilmente realizadas em espaços de baixa dimensionalidade, pois o número de conexões a serem desativadas por sítio diminui quando d descrece. Os aspectos estatísticos ligados à produçnao de diversidade e a dimensão do espaço aqui discutidos devem ser considerados a nosso ver na resposta à pergunta tantas vezes formulada por físicos e cosmologistas: Por que nosso universo físico é tridimensional? Nossa resposta a esta pergunta é a seguinte: Nosso universo tridimensional *pode* ser o universo *complexo* que ele é, pois d = 3 é a dimensão espacial que proporciona a maior diversidade por unidade de massa sem violar a estabilidade quântica de cada fragmento formado. Talvez seja oportuno lembrar aqui dois tipos de problemas quânticos de estabilidade encontrados em baixas dimensões. O primeiro tem a ver com a energia exata do estado fundamental de um átomo de hidrogênio em d dimensões. Ela é proporcional a $1/(d-1)^2$ e, portanto, diverge para d = 1[14]. O segundo não se refere a estados ligados mas, ao invés, é importante para a existência de uma simples partícula livre: não podemos mergulhar (e observar) nenhuma partícula livre quântica em espaço com dimensão d < 2[15]. Portanto, se reduzirmos d fazendo, por exemplo, $d \rightarrow 1$ conseguiríamos aumentar a produção de diversidade por unidade de massa, mas esbarraríamos nessas instabilidades quânticas. Se, ao invés, aumentássemos d, evitaríamos a instabilidade quântica mas teríamos, em contrapartida, poucas chances de gerar muita diversidade ou complexidade por cada unidade de matéria prima disponível para se construir o universo. Assim, d = 3 representa um compromisso de evolução para complexidade livre de choques com a mecânica quântica. O leitor a este ponto pode indagar: Por que deveríamos levar em consideração as limitações quânticas às baixas dimensões? Não poderíamos ter um universo complexo puramente clássico? Acreditamos que seja possível a existência de universos clássicos de baixas dimensões, mas estes seriam universos muito simples - *não universos diversificados ou complexos.* Temos dois tipos de justificativas para esta resposta. Em primeiro lugar, um universo complexo deve ser um que enfatize informação. A mecânica quântica é uma teoria que enfatiza informação, bem como a sua representação e a sua tranformação. Esta consideração tende a colocar a mecânica quântica dentro do quadro de requisitos para se explicar as origens de um universo complexo. Em segundo lugar, existe outro aspecto estatístico, não-quântico, da estabilidade de um sistema clássico que se fragmenta, que precisa ser levado em consideração, como lembra Sadhan K. Adhikari, do IFT (São Paulo), e que tende a inviabilizar universos clássicos diversificados em baixas dimensões: nessas condições, d = 1 ou 2, se pode produzir muita diversidade/massa mas, paralelamente, essa diversidade não se consegue manter por muito tempo - ela é consumida muito rapidamente. Esse argumento reforça a idéia de que um universo capaz de evoluir para um estado complexo, caracterizado por fragmentos de muitos tamanhos, não pode ser uni- ou bidimensional, sob pena dele se "volatilizar" ou decair rapidamente. Ou seja, mesmo num universo clássico, livre de imposições quânticas dos tipos mencionadas acima, um estado de grande grande diversidade não se consegue manter - ele é muito pouco estável.

Neste trabalho centramos nossa discussão sobre a diversidade de massa de fragmentos. Essa função definida na Eq.(1) tem interessantes pontos de contato com a entropia, a função que ocupou por mais de 40 anos a mente de Ludwig Boltzmann. Chamaremos a atenção para três desses pontos de contato entre diversidade e entropia: (1) Ambas são variáveis macroscópicas ligadas a conjutos de microestados. (2) Ambas são medidas da complexidade do sistema ou dos desvios do sistema em relação ao estado de maior ordem. (3) Diversidade e entropia são interessantes apenas num universo atômico (discreto). Num universo contínuo (não-atômico) a diversidade deve escalar trivialmente com o número de fragmentos: $D \sim N$; no contínuo a diversidade é o próprio número de fragmentos. A diversidade tem, no entanto, outros atrativos: ela pode ser definida para qualquer sistema, é mais fácil de ser implementada numericamente e apresenta uma conexão íntima com fractais (sistemas sem comprimentos característicos ou com grande diversidade de escalas).

AGRADECIMENTOS

A G. L. Vasconcelos, K. R. Coutinho, S. K. Adhikari, T. R. M. Sales, J. B. C. Garcia, T. I. Ren, T. I. Jyh, J. K. L. Silva, pelas discussões e entusiasmo. Aos membros do Laboratório de Física Teórica e Computacional do Recife, pelo interesse e estímulo, em particular aos colegas F. G. Brady, S. G. Coutinho e M. D. Coutinho-Filho.

REFERÊNCIAS

1. Thompson, D. W.; *On growth and Form* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1971).
2. Raup, D. M.; Gould, S. J.; Schopf, T. J. M.; Simberloff, D. S.; *J. Geol.*, (1973), **81**, 525.
3. Wolfram, S.; *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, Singapore, 1986).
4. Mandelbrot, B. B.; *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1983).
5. Coutinho, K.; Adhikari, S. K.; Gomes, M. A. F.; *J. Appl. Phys.*, (1993), **74**, 7577.

6. Gomes, M. A. F.; Vasconcelos, G. L.; *J. Phys.*, (1989) A **22**, L757; *Comp. Phys. Comm.*, (1989), **54**, 257; trabalho apresentado no Second Workshop on Scaling, Fractals and Nonlinear Variability in Geophysics (Paris, 1988).
7. Coutinho, K.; Gomes, M. A. F.; Adhikari, S. K.; *Europhys. Lett.*, (1992), **18**, 119.
8. Gomes, M. A. F.; Sales, T. R. M.; *Phys. Lett.*, (1993), A **177**, 215.
9. Sales, T. R. M.; Garcia, J. B. C.; Jyh, T. I.; Ren, T. I.; Gomes, M. A. F.; *Physica.*, (1993), A **197**, 604; *Phys. Rev.*, (1993), E **48**, 3345.
10. Sales, T. R. M.; *Phys. Rev.*, (1993), **48**, 2418.
11. Gomes, M. A. F.; Jyh, T. I.; Pastick, L.; Ren, T. I.; Ferreira, R. C.; *Phys. Rev.* E, submetido.
12. Coutinho, K. R.; Coutinho-Filho, M. D.; Gomes, M. A. F.; Nemirovsky, A. M.; *Phys. Rev. Lett.*, (1994), **72**, 3745.
13. Coutinho, K. R.; Gomes, M. A. F.; Adhikari, S. K.; a ser publicado.
14. Veja, por exemplo, Doren, D. J.; Herschbach, D. R.; *Phys. Rev.*, (1986), A **34**, 2654.
15. Veja, por exemplo, Abbot, L. F.; Wise, M. B.; *Am. J. Phys.*, (1981), **49**, 37.